ETH Zürich HS 2019
RW, D-MATL, D-MAVT
Dr. Christoph Czichowsky

Koordinator
Florian Krach

Stochastik

Serie 6

1. In einer Studie an Ehepaaren einer hessischen Landbevölkerung wurde untersucht, ob eine Beziehung zwischen Körperbau und Gattenwahl besteht. Es wurden bei Ehegatten die Körperbautypen *1 (leptosom, schmächtig)*, *2 (athletisch)* und *3 (pyknisch, fettleibig)* unterschieden. Die unten stehende Tabelle zeigt die entsprechende gemeinsame Verteilung von X (Körperbau Mann) und Y (Körperbau Frau).

Körperbautyp	Körperbautyp der Ehefrau		
des Ehemannes	1 leptosom	2 athletisch	3 pyknisch
1 leptosom	11.6%	4.5%	7.6%
2 athletisch	7.1%	46.0%	7.6%
3 pyknisch	4.5%	a	9.8%

a) Bestimme den fehlenden Wert a.

b) Berechne die Randverteilungen, d.h. die Verteilung von X und die Verteilung von Y.

c) Berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit $P[X \leq 2 | Y \leq 2]$.

d) Berechne die gemeinsame Verteilung von X und Y unter Annahme der Unabhängigkeit. Benutze dazu die Randverteilungen aus **b)** und vergleiche dann die Werte mit obiger Tabelle.

2. Die gemeinsame Dichte der beiden Zufallsvariablen X und Y sei konstant gleich c auf dem grauen Dreieck und 0 ausserhalb.

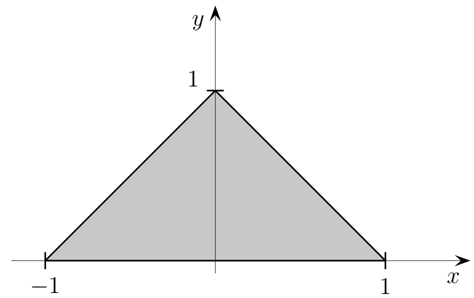
a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichtefunktion $f_{X,Y}$.

b) Bestimmen Sie die beiden Randdichten.

Tipp: Unterscheide bei der Rechnung zwischen den Regionen $\{x < -1\}$; $\{-1 \leq x < 0\}$; $\{0 \leq x < 1\}$ und $\{1 \leq x\}$.

c) Bestimmen Sie $E[X]$, $E[Y]$, $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

Bitte wenden!



d) Bestimmen Sie die Kovarianz zwischen X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Gegeben $X = 0.5$, was ist der bedingte Erwartungswert von Y?

3. Wenn an der Tramhaltestelle "ETH/Universitätsspital" je ein in Richtung Bahnhof fahrendes Tram der Linien 6 und 10 mit weniger als $\tau = 30s$ zeitlichem Abstand eintreffen, wird eines ausgebremst und muss auf offener Strecke warten; wir bezeichnen dies als "Kollision".

Im abendlichen Stossverkehr fahren Trams nicht mehr nach Fahrplan, sondern zufällig. Wir nehmen an, dass zwei Trams (eines von Linie 6, eines von Linie 10) unabhängig und über die Zeit $[0, T]$ ($T = 5\text{min}$) uniform verteilt eintreffen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit einer Kollision?

Tipp: Zeichne ein $[0, T] \times [0, T]$ Viereck wo jede Achse der Ankunftszeit eines Trams entspricht. Finde das Gebiet auf dem Viereck wo es zur Kollision kommt.

4. Seien X und Y die Lebensdauer zweier Maschinen, "Maschine 1" bzw. "Maschine 2", in Monaten. Die beiden Variablen sind unabhängig und exponentialverteilt:

$$X \sim \text{Exp}(\lambda_1), \quad Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$$

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Maschine 1 maximal einen Monat länger funktioniert als Maschine 2, wenn $\lambda_1 = \frac{1}{10}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{15}$?

b) Sei weiterhin $\lambda_1 = \frac{1}{10}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{15}$. Wenn man weiss, dass Maschine 1 nach 4 Monaten kaputt war, was ist dann die erwartete Lebensdauer der Maschine 2?

c) (**Zusatz**) Wir nehmen nun an, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{10} := \lambda$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen die Maschinen im gleichen Monat kaputt?

Siehe nächstes Blatt!

Sei $N(t)$ die Anzahl der Produkte die Maschine 1 im Zeitintervall $[0, t]$, $t > 0$ (in Stunden), herstellt. Wir modellieren $N(t)$ mit einem *homogenen Poissonprozess* mit *Intensität* λ, das bedeutet für jedes $t > 0$ gilt

$$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t).$$

d) Angenommen $\lambda = 8.1$, was ist der erwartete Wert an Produkten die innerhalb von einem Tag (10 Stunden) hergestellt werden? Berechne auch die Standardabweichung davon.

e) Sei T_1 der Zeitpunkt an dem das erste Produkt hergestellt wird. Bestimme die kummulative Verteilungsfunktion von T_1 und berechne den Erwartungswert und die Varianz. Wie heisst die Verteilung von T_1?
Tipp: beschreibe das Ereignis $\{T_1 > t\}$ mithilfe von $N(t)$.

5. (leicht modifizierte Prüfungsaufgabe - Sommer 2014) In einem Labor werden Nanodrähte von 10μm Länge erzeugt, die 1pg $= 10^{-12}$g wiegen und aus Platin und Nickel bestehen. Aufgrund des Herstellungsverfahrens sind der Nickelinhalt X (in pg) und die Dauer der Funktionsfähigkeit T (in Sekunden) der Drähte zufällig, mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,T}(x,t) = \begin{cases} cx\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{e}^{-xt}, & \text{falls } x \in (0,1),\ t > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Randdichte $f_X(x)$ von X gegeben ist durch

$$f_X(x) = \begin{cases} c\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{falls } x \in (0,1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Berechnen Sie c, so dass $f_{X,T}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

c) Berechnen Sie die bedingte Dichte von T gegeben, dass der Nickelinhalt $X = x$ eines Nanodrahts bekannt ist. Wie heisst diese Verteilung?

d) Sind X und T unabhängig? Begründe.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Nickelinhalt weniger als 0.5pg beträgt.

f) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X (ohne den numerischen Wert von π einzusetzen).

Abgabe: 04. oder 05. November.
Präsenz: Montag und Donnerstag, 12:00-13:00 Uhr im HG G 32.6.
Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0603-00L/`